21/5/2018

Έστω $n \geq 2$ $A = \{1, 2, \dots, n\}$ κύκλος $\mu = (b_1, b_2, \dots, b_r)$ μήκους r όπου $r \leq n$.

(Παράδειγμα $n = 4$ $\mu = (4, 2, 1)$ δηλ. $\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in S_4$)

Δείξαμε: $ord(\mu) = r$.

Δηλαδή η τάξη ενός κύκλου είναι ίση με το μήκος του.

Δείξαμε: Αν $\sigma \in S_n$, τότε η σ γράφεται σαν "γινόμενο" (δηλ. σύνθεση) κύκλων ξένων ανά δύο.

π.χ. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1, 3) \circ (2, 4)$

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u> $(1, 2) \circ (1, 3) = (1, 3, 2)$

$(1, 3) \circ (1, 2) = (1, 2, 3)$

Άρα $(1,2)\circ(1,3) \neq (1,3)\circ(1,2)$

<u>ΛΗΜΜΑ</u> Έστω $\mu_1,\mu_2 \in S_n$ κύκλοι <u>ξένοι μεταξύ</u> τους.
Τότε $\mu_1 \circ \mu_2 = \mu_2 \circ \mu_1$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

Έστω $\mu_1 = (a_1, \dots, a_r)$, $\mu_2 = (b_1, \dots, b_r)$
με $b_i \neq a_j$ για κάθε i, j
Αφού $S_n = \{\sigma : A \to A,\ \sigma\ 1-1 \text{ και ΕΠΙ}\}$ με
$A = \{1, \dots, n\}$ αρκεί να δείξουμε $(\mu_1 \circ \mu_2)(c) = (\mu_2 \circ \mu_1)(c)$ για κάθε $c \in A$.

<u>ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1</u> $c \neq a_i$ $\forall i$ ΚΑΙ $c \neq b_j$ για κάθε j.
Αφού $c \neq b_j$ $\forall j$ $\mu_2(c) = c$.
Αφού $c \neq a_i$ $\forall i$, $\mu_1(c) = c$
Άρα $(\mu_1 \circ \mu_2)(c) = \mu_1(\mu_2(c)) = \mu_1(c) = c$
$(\mu_2 \circ \mu_1)(c) = \mu_2(\mu_1(c)) = \mu_2(c) = c$

<u>ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2</u> $c = a_i$ για κάποιο i με $i < r$.

Τότε $(\mu_1 \circ \mu_2)(c) = \mu_1(\mu_2(a_i)) < \mu_1(a_i) = a_{i+1}$
$(\mu_2 \circ \mu_1)(c) = \mu_2(\mu_1(a_i)) = \mu_2(a_{i+1}) = a_{i+1}$

<u>ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3</u> $c = a_r$

Τότε $(\mu_1 \circ \mu_2)(c) = \mu_1(\mu_2(c)) = \mu_1(\mu_2(c)) = \mu_1(\mu_2(a_r)) = \mu_1(a_r) = a_1$
$(\mu_2 \circ \mu_1)(c) = \mu_2(\mu_1(c)) = \mu_2(\mu_1(a_r)) = \mu_2(a_1) = a_1$

<u>ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3</u> $c = b_j$ με $j < s$ Παρόμοια απόδειξη

<u>ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 4</u> $c = b_s$

<u>ΠΟΡΙΣΜΑ</u> Έστω $\mu_1, \mu_2 \in S_n$ δύο κύκλοι ξένοι μεταξύ τους και $k \in \mathbb{Z}$. Τότε $(\mu_1 \circ \mu_2)^k = \mu_1^k \circ \mu_2^k$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u> Έχουμε από το Λήμμα $\mu_1 \circ \mu_2 = \mu_2 \circ \mu_1$
Άρα προκύπτει από την επόμενη πρόταση.

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u> Έστω $(G, *)$ ομάδα $r \in \mathbb{Z}$ και $a, b \in G$

με $a*b=b*a$. Τότε $(a*b)^r = a^r * b^r$

(**ΠΡΟΣΟΧΗ** Γενικά για $r=2$ $(a*b)^2 = a*b*a*b$
ενώ $a^2*b^2 = a*a*b*b$)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ **ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1** $r\geq 1$. Επαγωγή στο r
Για $r=1$ ισχύει. Έστω ότι ισχύει για $r\geq 1$.
Τότε $(a*b)^{r+1} = (a*b)^r*(a*b) \overset{\text{ΕΠΑΓ. ΥΠΟΘ.}}{=} a^r*b^r*a*b =$

$a^r * \underbrace{b*b*\dots*b}_{r-\text{φορές}} * a*b \overset{a*b=b*a}{=} a^r*a*\underbrace{b*\dots*b}_{r-\text{φορές}}*b$
$= a^{r+1}*b^{r+1}$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2 $r=0$ Τότε $(a*b)^0 = e = e*e =$
a^0*b^0.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3 $r<0$ Θέτουμε $\tilde{a} = a^{-1}$, $\tilde{b} = b^{-1}$
Αφού $a*b=b*a \Rightarrow a*b*a^{-1} = b*a*a^{-1} = b*e =$
$b \Rightarrow b*a^{-1} = a^{-1}*b \Rightarrow a^{-1} = b^{-1}*a^{-1}*b \Rightarrow$
$a^{-1}*b^{-1} = b^{-1}*a^{-1}$
Άρα $\tilde{a}*\tilde{b} = \tilde{b}*\tilde{a}$

Αφού $r<0$ $(a*b)^r = ((a*b)^{-1})^{|r|} = (b^{-1}*a^{-1})^{|r|} =$
$(\tilde{b}*\tilde{a})^{|r|} \overset{\text{ΠΕΡΙΠΤ. 1}}{=} \tilde{b}^{|r|}*\tilde{a}^{|r|} = \tilde{a}^{|r|}*\tilde{b}^{|r|} = a^r*b^r$

ΘΕΩΡΗΜΑ Έστω $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_t \in S_n$ κύκλοι ξένοι ανά δύο με τον μ_i να είναι r_i-κύκλος
Τότε $ord(\mu_1\circ\mu_2\circ\dots\circ\mu_t) = \text{Ε.Κ.Π.}(r_1, r_2, \dots, r_t)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Βρείτε την τάξη του

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 8 & 12 & 1 & 7 & 2 & 4 & 6 & 3 & 11 & 9 & 10 & 5 \end{pmatrix} \in S_{12}$$

ΛΥΣΗ Γράφουμε το σ σαν γινόμενο κύκλων ξένων ανά δύο. Έχουμε

$\sigma = (1,8,3)\circ(2,12,5)\circ(4,7,6)\circ(9,11,10)$

ΑΠΟ Θεώρημα $ord(\sigma) = $ Ε.Κ.Π. $(3,3,3,3) = 3$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Στο $S_{..}$ με $n \geq 8$

$$(1,8,3) = (8,3,1) = (3,1,8)$$

Ο αντίστροφος του κύκλου είναι:
$(1,3,6)^{-1} = (6,3,1)$
$(1,5,7,11)^{-1} = (11,7,5,1)$

ΠΡΟΤΑΣΗ Έστω $\sigma = (a_1, a_2, \ldots, a_r) \in S_n$ κύκλος.
Τότε $\sigma^{-1} = (a_r, a_{r-1}, \ldots, a_2, a_1)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Θέτουμε $\mu = (a_r, a_{r-1}, \ldots, a_2, a_1)$
$A = \{1, 2, \ldots, n\}$ Υπολογίζουμε $\mu \circ \sigma$.
Έστω $c \in A$ με $c \neq a_i \; \forall i$. Τότε $(\mu \circ \sigma)(c) = \mu(\sigma(c)) =$
$\mu(c) = c$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2 $c = a_i$ για $i < r$
Τότε $(\mu \circ \sigma)(c) = \mu(\sigma(c)) = \mu(\sigma(a_i)) =$
$\mu(a_{i+1}) = a_i = c$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3 $c = a_r$. Τότε $(\mu \circ \sigma)(c) = \mu(\sigma(c)) =$
$\mu(\sigma(a_r)) = \mu(a_1) = a_r = c$.

Αφού S_n ομάδα και με $\sigma \in S_n$ και
$\mu \circ \sigma = e_{S_n}$ από λήμμα $\Rightarrow$ $\sigma \circ \mu = e_{S_n}$
Άρα $\mu = \sigma^{-1}$.

ΕΡΩΤΗΜΑ Έστω $\sigma \in S_n$. Πως υπολογίζουμε το σ^{-1};

Α' ΤΡΟΠΟΣ Έστω $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \end{pmatrix}$

Αντιμεταθέτουμε τις γραμμές του σ και μετά ταξινομούμε τις στήλες κατά γνησίως αύξουσα σειρά

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in S_5$

Τότε $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Β' τρόπος Γράφουμε $\sigma = \mu_1 \circ \mu_2 \circ \ldots \circ \mu_r$ γινόμενο κύκλων ξένων ανά δύο. Τότε $\sigma^{-1} = \mu_r^{-1} \circ \mu_{r-1}^{-1} \circ \ldots \circ \mu_1^{-1}$ και το μ_i^{-1} υπολογίζεται από την πρόταση (ΠΡΟΣΟΧΗ: Αντίστροφη σειρά παραγόντων)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ $\sigma = (1,4,2) \circ (3,5)$
Άρα $\sigma^{-1} = (3,5)^{-1} \circ (1,4,2)^{-1} = (5,3) \circ (2,4,1)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω $n \geq 2$ ακέραιος. Ονομάζουμε διαμέριση του n μια πεπερασμένη ακολουθία $b_1, b_2, \ldots, b_s$ ώστε $1 \leq b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_s$ και $n = b_1 + b_2 + \ldots + b_s$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Σύνολο διαμερίσεων του $2 = \{(2), \ldots, (1,1)\}$
-״- -״- του $3 = \{(3), (2,1), (1,1,1)\}$
-״- -״- του $4 = \{(4), (3,1), (2,2), (2,1,1), (1,1,1,1)\}$

Παράδειγμα Για $n=3$ λέμε ο κύκλος $(1,2,3)$ είναι στην διαμέριση (3) του 3 το ίδιο οι κύκλοι $(3,1,2)$, $(3,2,1)$. Λέμε το $\sigma = (1\,2) \in S_3$ αντιστοιχεί στην διαμέριση $(1,2)$. Το $e = (1)(2)(3) \in S_3$ αντιστοιχεί στην διαμέριση $(1,1,1)$.

Παράδειγμα $n=10$ Σε ποια διαμέριση του 10 αντιστοιχεί το $\sigma = (1,5,8) \circ (2,4) \in S_{10}$;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ $\sigma = (1,5,8) \circ (2,4) \circ (3) \circ (6) \circ (7) \circ (9) \circ (10)$
Άρα η διαμέριση του 10:
$(\underbrace{1,1,1,1,1}_{5\text{-φορές}}, 2, 3)$

Συμπέρασμα: κάθε $\sigma \in S_n$ αντιστοιχεί σε μια διαμέριση του n. **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ** $\sigma = (1,2,3,4) \in S_5$. Η διαμέριση του 5 που αντιστοιχεί στο σ

είναι (1,4) γιατί $\sigma=(1,2,3,4)(5)$

δηλ. έχουμε έναν 1-κύκλο και 14-κύκλο.

Παράδειγμα. Αν $\sigma=(1)\circ(2,3)\circ(4,5)\circ(6,7,8,9)\in S_9$ η διαμέριση του 9 που αντιστοιχεί στο σ είναι $(1,2,2,4)$. Δηλ. το i εμφανίζεται στην διαμέριση α_i φορές αν και μόνο αν στην γραφή του σ σαν γινόμενο κύκλων ξένων ανά δύο εμφανίζονται α_i κύκλοι μήκους i.

Εφαρμογή Ποια είναι η μεγαλύτερη τάξη στοιχείου της S_4;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Οι διαμερίσεις του 4 είναι
$(1,1,1,1)$ τα στοιχεία που αντιστοιχούν
$(1,1,1,1)$ στην S_4 έχουν τάξη $ΕΚΠ(1,1,1,1)=1$
$(1,3)$ τα στοιχεία ... έχουν τάξη $ΕΚΠ(3,1)=3$
τέτοιο στοιχείο το $(123)(4)\in S_4$
$(2,2)$ τα στοιχεία ... έχουν τάξη $ΕΚΠ(2,2)=2$
(π.χ. $(12)(34)$)
$(1,1,2)$ τα στοιχεία ... έχουν τάξη $ΕΚΠ(1,1,2)=2$
(π.χ. $(12)(3)(4)$)

Άρα, η μέγιστη τάξη στοιχείου της S_4 είναι 4, και η S_4 έχει στοιχεία τάξης 1, 2, 3, 4

Διαμ. 4 π.χ. $(1,2,3,4)$ με τάξη 4.

- Ποια είναι η μεγαλύτερη τάξη στοιχείου της S_5;

Οι διαμερίσεις του 5 είναι
$(1,1,1,1,1)$ τάξη $ΕΚΠ(1,1,1,1,1)=1$ | Στοιχείο id_{S_5}

$(1,1,1,2)$ τάξη $=2$ π.χ. $(1,2)\in S_5$
$(1,1,3)$ τάξη $=3$ π.χ. $(1,2,3)\in S_5$

$(1,4)$ τάξη $=4$ π.χ. $(1,2,3,4)\in S_5$

$(1,2,2)$ τάξη $=2$ π.χ. $(1,2)\circ(3,4)\in S_5$

$(2,3)$ τάξη $=\text{ΕΚΠ}(2,3)=6$ π.χ. $(1,2)\circ(3,4,5)\in S_5$

(5) τάξη $=5$ π.χ. $(1,2,3,4,5)\in S_5$

Άρα η μέγιστη τάξη στοιχείου της S_5 είναι 6

S_5 έχει στοιχεία τάξης $1,2,3,4,5,6$.

Αποδ. Ότι βρήκαμε όλες τις διαμερίσεις του 5.

Βήμα 1ο Αν εμφανίζεται 5, είναι η (5)

Βήμα 2ο Αν δεν « 5 αλλά εμφανίζεται 4 τότε $(1,4)$

Βήμα 3ο Αν δεν εμφανίζεται 4,5 αλλά 3 τότε $(2,3)$ $(1,1,3)$

Βήμα 4ο Αν δεν εμφανίζεται 3,4,5, αλλά 2 τότε $(1,1,1,2)$, $(1,2,2)$

Βήμα 5ο Αν δεν εμφανίζεται 2,3,4,5 αλλά 1 τότε $(1,1,1,1,1)$